Ασκήσεις:

Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

1. $y' = y^2 - xy + 1$

2. $y' = \dfrac{2}{x^2} - y^2$

Λυση

1. Η δοθείσα εξίσωση είναι τύπου Riccati και έχει ως μια ειδική λύση τη συνάρτηση $y_1(x) = x$. Εισάγοντας έτσι το μετασχηματισμό

$$y = x + \frac{1}{u}\ , \quad (1)$$

η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$1 - \frac{u'}{u^2} = \left(x + \frac{1}{u}\right)^2 - x\left(x + \frac{1}{u}\right) + 1\ ,$$

ή

$$u' + xu = -1\ ,$$

η οποία είναι γραμμική και έχει ως γενική λύση την

$$u = e^{-\int x dx}\left\{C - \int e^{\int x dx} dx\right\}$$

$$= e^{-x^2/2}\left[C - \int e^{x^2/2} dx\right] . \quad (2)$$

Έτσι, η *γενική λύση* της αρχικής διαφορικής εξίσωσης δίνεται από τον τύπο

$$y = x + \frac{e^{x^2/2}}{C - \int e^{x^2/2} dx}\ , \quad (3)$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Παρατηρούμε επίσης ότι καμία επιλογή της σταθεράς C δεν μπορεί να δώσει την ειδική λύση $y_1(x) = x$ και άρα αυτή είναι μια *ιδιάζουσα λύση*. Επιπλέον, σημειώνουμε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα στον παρονομαστή της (3) δεν μπορεί να υπολογιστεί μέσω των στοιχειωδών συναρτήσεων.

2. Η δοθείσα εξίσωση είναι τύπου Riccati και έχει ως μια ειδική λύση τη συνάρτηση $y_1(x) = -1/x$. Εισάγοντας έτσι το μετασχηματισμό

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{u}\ , (1)$$

η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{x^2} - \frac{u'}{u^2} = \frac{2}{x^2} - \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{u}\right)^2 ,$$

ή

$$u' + \frac{2}{x}u = 1 ,$$

η οποία είναι γραμμική και έχει ως γενική λύση την

$$u = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left\{C + \int e^{\int \frac{2}{x}dx}dx\right\}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[C + \int x^2 dx\right]$$

$$= \frac{x^3 + 3C}{3x^2}\ . (2)$$

Έτσι, η *γενική λύση* της αρχικής διαφορικής εξίσωσης δίνεται από τον τύπο

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{3x^2}{x^3 + 3C}\ , (3)$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Παρατηρούμε επίσης ότι καμία επιλογή της σταθεράς C δεν μπορεί να δώσει την ειδική λύση $y_1(x) = -1/x$ και άρα αυτή είναι μια *ιδιάζουσα λύση*.